

Esercizio 1

Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{|x+1|}{x-1}.$$

Soluzione:

Il campo di esistenza di $f(x)$ si ottiene eliminando gli zeri del denominatore:

$$E = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

La funzione è continua in tutto il dominio e derivabile per $x \neq -1$, punto in cui si annulla il numeratore. $f(x)$ si annulla solamente per $x = -1$, quindi non è pari né dispari, né periodica. Il segno di $f(x)$ è quello del denominatore, per cui:

$$f(x) > 0 \iff x > 1, \quad f(x) < 0 \iff x < 1.$$

Per semplificare lo studio del grafico dividiamo E in due sottodomini in cui il numeratore è, rispettivamente, ≤ 0 o ≥ 0 :

$$E_- = (-\infty, -1], \quad E_+ = [-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

Abbiamo:

$$f(x) = -\frac{x+1}{x-1}, \quad x \in E_-,$$
$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in E_+.$$

Studiamo i limiti per $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{x+1}{x-1} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{x+1}{x-1} = 1.$$

La funzione ha due asintoti orizzontali di equazioni $y = \pm 1$, rispettivamente a $\pm\infty$. Studiamo i limiti per $x \rightarrow 1^\pm$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty,$$

La funzione ha un asintoto verticale di equazione $x = 1$.

Per $x < -1$ la derivata è:

$$f'(x) = \left(-\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{2}{(x-1)^2} > 0.$$

Per $x > -1$, $x \neq 1$ la derivata è:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0.$$

$f(x)$ è strettamente crescente in $(-\infty, -1)$ e strettamente decrescente in $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Quindi ha un massimo locale in $x = -1$, dove si annulla.

Per $x < -1$ la derivata seconda è:

$$f''(x) = \left(-\frac{x+1}{x-1}\right)'' = -\frac{4}{(x-1)^3} > 0$$

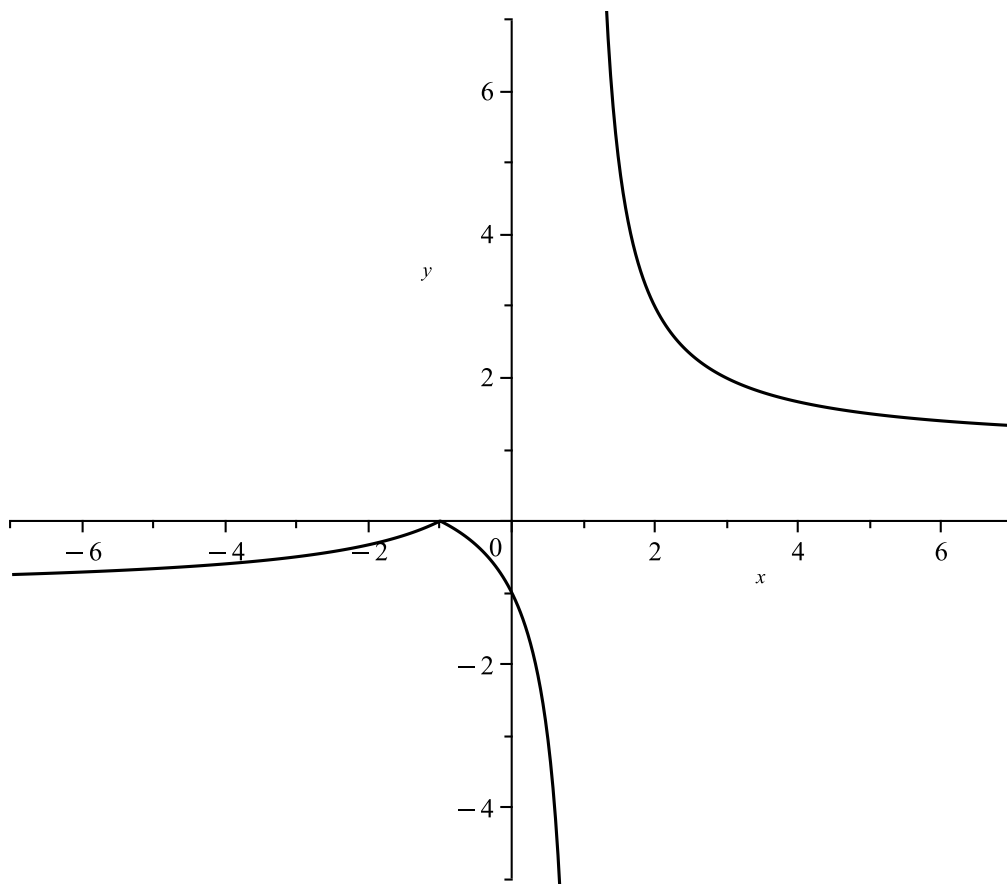
Per $x > -1$, $x \neq 1$ la derivata è:

$$f''(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' = \frac{4}{(x-1)^3},$$

per cui in $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ si ha $f''(x) < 0$ in $(-1, 1)$ e $f''(x) > 0$ in $(1, +\infty)$. Di conseguenza la funzione è convessa in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$, concava in $(-1, 1)$.

Il grafico di $f(x)$ è in figura 1.

Figure 1: Il grafico di $\frac{|x+1|}{x-1}$



Esercizio 2

Studiare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{x^2 - \sin x^2}.$$

Soluzione:

Usiamo le formule di Taylor di e^x e $\sin x$ nell'origine:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

da cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{x^2 - \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + o(x^6) - 1 - x^3}{x^2 - x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^6}{2} + o(x^6)}{\frac{x^6}{6} + o(x^6)} = \frac{1}{2} / \frac{1}{6} = 3.$$

Esercizio 3

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin(x+\pi) dx.$$

Soluzione:

La relazione $\sin(x+\pi) = -\sin x$ permette di semplificare l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin(x+\pi) dx &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin x dx = \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx + [\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale ha la forma $(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$, quindi impostiamo l'equazione:

$$x \sin x = [(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x]' = (a+d+cx)\cos x + (c-b-ax)\sin x.$$

Questo porta al sistema

$$\begin{cases} a+d=0 \\ c=0 \\ c-b=0 \\ -a=1 \end{cases},$$

che ha per soluzioni

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 0 \quad d = 1.$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin(x+\pi) dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = - [-x \cos x + \sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2.$$