Esercizio 1

Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{e^x}.$$

Soluzione:

Il denominatore non si annulla, quindi $f(x)$ è definita in tutto $\mathbb{R}$. Per semplicità possiamo anche scrivere $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x} = x(x + 2)e^{-x}$. La funzione si annulla solo per $x = 0$ e $x = -2$, quindi non è pari né dispari né periodica. Il segno di $f(x)$ è quello di $x^2 + 2x$, quindi abbiamo

$$f(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty),$$
$$f(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-2, 0).$$

Studiando i limiti per $x \to \pm\infty$ abbiamo:

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 + 2x)e^{-x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 + 2x)e^{-x} = 0.$$

L'asse x è asintoto orizzontale a $+\infty$. Per la continuità di $f(x)$ non esistono asintoti verticali. Per quanto riguarda un posibile asintoto obliquo a $-\infty$ consideriamo il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2 + 2x)e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} (x + 2)e^{-x} = +\infty.$$

Questo esclude asintoti obliqui a $-\infty$. La derivata di $f(x)$ è:

$$f'(x) = (2 - x^2)e^{-x}.$$

Abbiamo:

$$f'(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty),$$
$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2},$$
$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Da quanto sopra si deducono gli intervalli di monotonia. Inoltre $f(x)$ ha un punto di minimo per $x = -\sqrt{2}$ ed uno di massimo per $x = \sqrt{2}$. I relativi valori sono :

$$f(-\sqrt{2}) = 2(1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}}, \qquad f(\sqrt{2}) = 2(1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}.$$

La derivata seconda di $f(x)$ è:

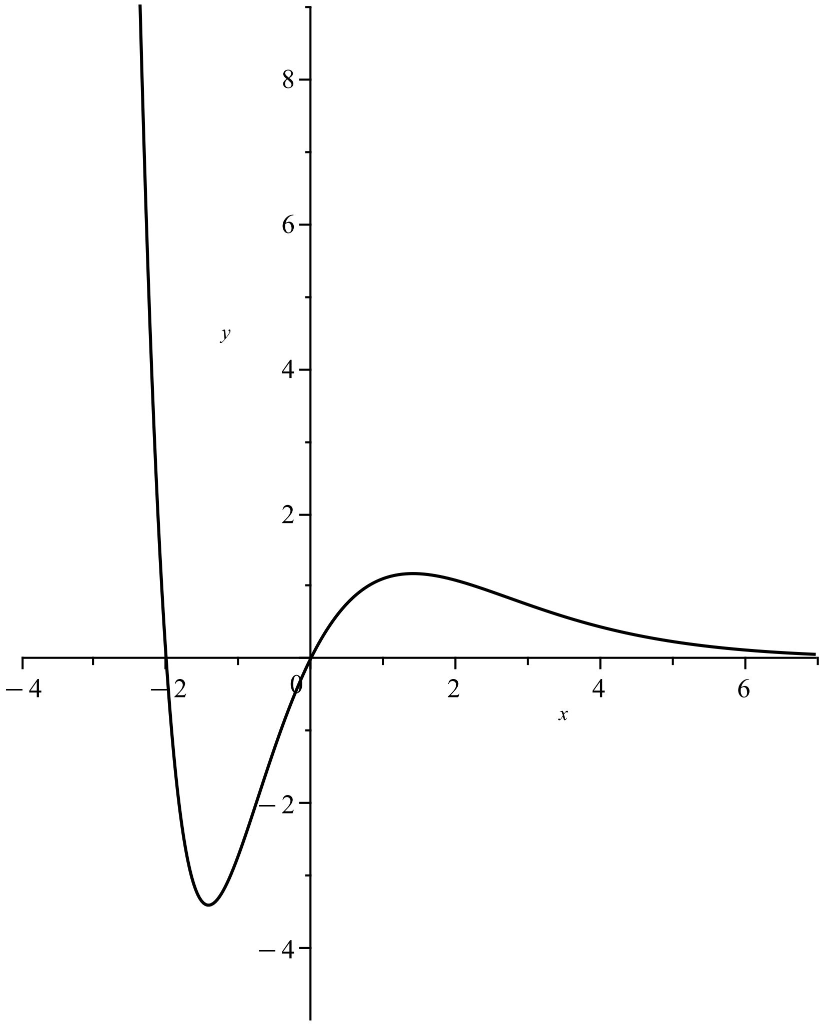
$$f''(x) = (x^2 - 2x - 2)e^{-x}.$$

Abbiamo:

$$f''(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, +\infty),$$
$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{3},$$
$$f''(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}).$$

La funzione è convessa in $(-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty)$ e concava in $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. Per $x = 1-\sqrt{3}$ la funzione ha un flesso discendente, per $x = 1 + \sqrt{3}$ la funzione ha un flesso ascendente. Il grafico di $f(x)$ è in figura 1.

Figure 1: Il grafico di $\frac{x^2+2x}{e^x}$



Esercizio 2

Studiare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - 1}{\operatorname{sen} x^2 \, \operatorname{senh} x^2}.$$

Soluzione:

Usiamo le formule di Taylor di $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ *e* $\operatorname{senh} x$ *nell'origine.*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - 1}{\operatorname{sen} x^2 \, \operatorname{senh} x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1}{(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6))(x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3

Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int (x+1)\cosh(-x)\, dx.$$

Soluzione:
Abbiamo $\cosh(-x) = \cosh x$, *quindi possiamo scrivere:*

$$\int (x+1)\cosh(-x)\,dx = \int (x+1)\cosh x\,dx.$$

Inoltre

$$\int (x+1)\cosh x\,dx = \int x\cosh x\,dx + \int \cosh x\,dx = \int x\cosh x\,dx + \operatorname{senh} x.$$

Integrando per parti otteniamo:

$$\int x\cosh x\,dx = x\operatorname{senh} x - \int \operatorname{senh} x\,dx = x\operatorname{senh} x - \cosh x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Concludendo:

$$\int (x+1)\cosh(-x)\,dx = x\operatorname{senh} x - \cosh x + \operatorname{senh} x + C =$$
$$= (x+1)\operatorname{senh} x - \cosh x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$