Esercizio 1

Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x}.$$

Soluzione:

La funzione è definita laddove il denominatore non si annulla, quindi $E = (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, +\infty)$. $f(x)$ *non è pari, né dispari, né periodica. Il segno di* $f(x)$ *si ottiene studiando i segni di numeratore e denominatore. Per il numeratore abbiamo:*

$$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty),$$

$$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-2, -1).$$

Per il denominatore abbiamo:

$$x^2+3x = x(x+3) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty),$$

$$x^2+3x = x(x+3) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-3, 0).$$

Quindi abbiamo:

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (0, +\infty),$$

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-3 - 2) \cup (-1, 0).$$

La funzione si annulla solo in -1 e -2. Per quanto riguarda i limiti ai bordi di E *abbiamo:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x} = 1,$$

$$\lim_{x\to-3^-} \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-3^+} \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x} = +\infty.$$

La derivata di $f(x)$ *è:*

$$f'(x) = -\frac{4x+6}{x^2(x+3)^2}.$$

Abbiamo:

$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < -\frac{3}{2}, \qquad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow x = -\frac{3}{2}, \qquad f'(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > -\frac{3}{2}.$$

La funzione ha un massimo in $-\frac{3}{2}$, *in cui abbiamo:*

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{9}.$$

La derivata seconda di $f(x)$ è:

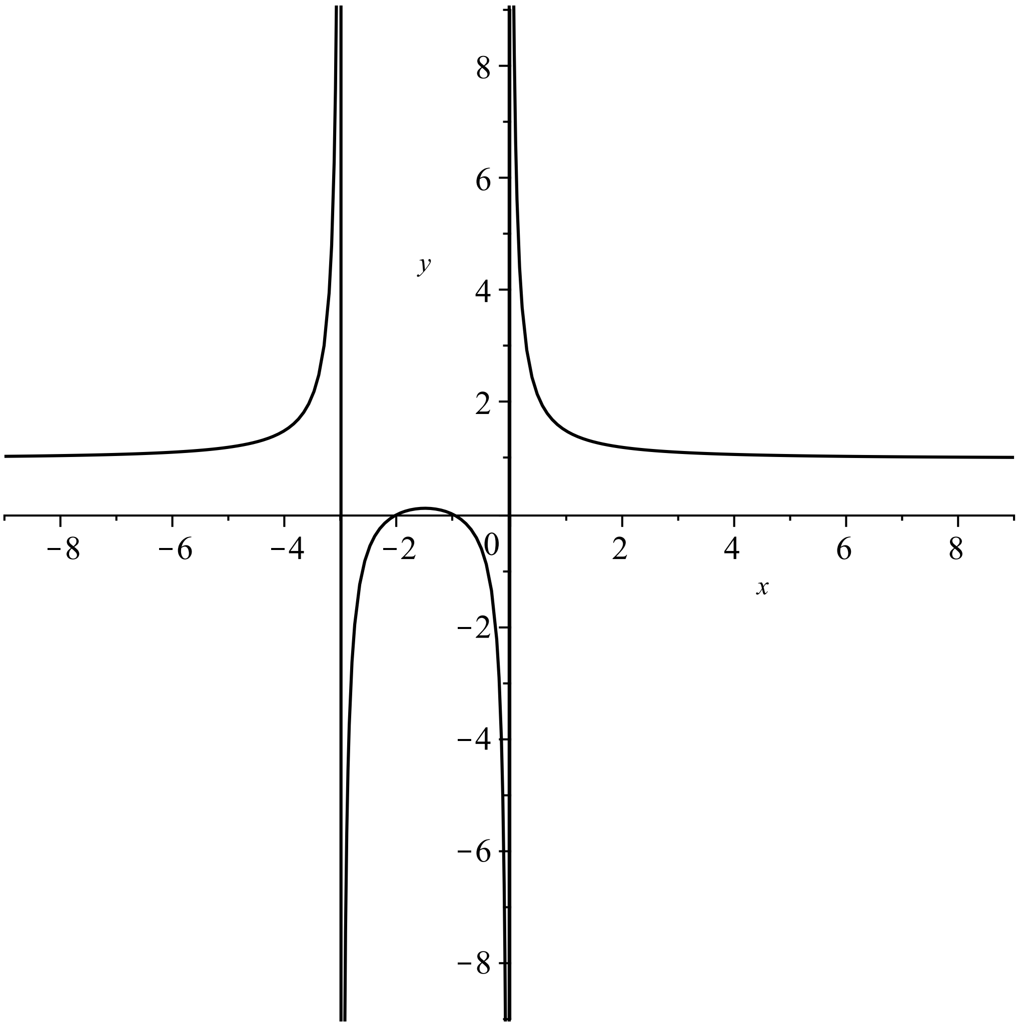
$$f''(x) = -\frac{12(x^2+3x+3)}{x^3(x+3)^3}.$$

Il trinomio x^2+3x+3 è sempre positivo perché il suo discriminante è negativo. Quindi il segno di $f''(x)$ è l'opposto del segno del denominatore:

$$f''(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty,-3) \cup (0,+\infty), \qquad f''(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-3,0).$$

La funzione è convessa in $(-\infty,-3) \cup (0,+\infty)$ e concava in $(-3,0)$. Il grafico di $f(x)$ è in figura 1.

Figure 1: Il grafico di $\frac{x^2+3x+2}{x^2+3x}$



Esercizio 2

Studiare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x^2 - 1}{x \text{ senh}\, x^3}$$

Soluzione:
Usiamo le formule di Taylor di $\cosh x$ *e* $\operatorname{senh} x$ *nell'origine.*

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad\qquad \operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x^2 - 1}{x\ \operatorname{senh} x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1}{x\ \left(x^3 + \frac{x^9}{6} + o(x^9)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^\pi e^{2x} \cos(-x)\ dx.$$

Soluzione:
La primitiva di $e^{2x}\cos(-x) = e^{2x}\cos x$ *è una funzione del tipo* $e^{2x}\,(A\cos x + B \operatorname{sen} x)$*. Derivando questa funzione e imponendo l'uguaglianza con* $e^{2x}\cos(-x) = e^{2x}\cos x$ *otteniamo:*

$$\left(e^{2x}\,(A\cos x + B\operatorname{sen} x)\right)' = e^{2x}\Big((2A+B)\cos x + (2B - A)\operatorname{sen} x\Big) = e^{2x}\cos x.$$

Imponiamo l'uguaglianza dei coefficienti di $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$ *ricaviamo il sistema:*

$$\begin{cases} 2A + B = 1 \\ -A + 2B = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$A = \frac{2}{5}, \qquad B = \frac{1}{5},$$

quindi possiamo scrivere:

$$\int_0^\pi e^{2x}\cos(-x)\ dx = \frac{1}{5}\left[e^{2x}(2\cos x + \operatorname{sen} x)\right]_0^\pi = \frac{1}{5}\left[e^{2\pi}(2\cos\pi + \operatorname{sen}\pi) - e^0(2\cos 0 + \operatorname{sen} 0\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[-2e^{2\pi} - 2\right] = -\frac{2}{5}\left[e^{2\pi} + 1\right].$$