Esercizio 1

Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}.$$

Soluzione:

La funzione può essere scritta in questo modo:

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}.$$

L'insieme di definizione si ottiene eliminando da $\mathbb{R}$ *gli zeri del denominatore, quindi*

$$E = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Essendo un rapporto tra quadrati, $f(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in E$. *Essa si annulla solo per* $x = -1$. $f(x)$ *è continua e derivabile in tutto* E.
Studiamo i limiti ai bordi del dominio.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = 1.$$

La retta di equazione $y = 1$ *è asintoto orizzontale a* $\pm\infty$. *Di conseguenza non esistono asintoti obliqui. Inoltre abbiamo*

$$\lim_{x\to1^-} \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = +\infty$$

perché il denominatore tende a 0^+ *ed il numeratore tende a 4. La retta di equazione* $x = 1$ *è asintoto verticale.*
La derivata prima è:

$$f'(x) = -\frac{4x+4}{(x-1)^3}.$$

Abbiamo $f'(x) = 0$ *se e solo se* $x = -1$. *Inoltre*

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, 1)\,,$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\,.$$

Il punto -1, *dove* $f(x)$ *si annulla, è di minimo assoluto (globale).*
La derivata seconda è:

$$f'(x) = -\frac{8x+16}{(x-1)^4}.$$

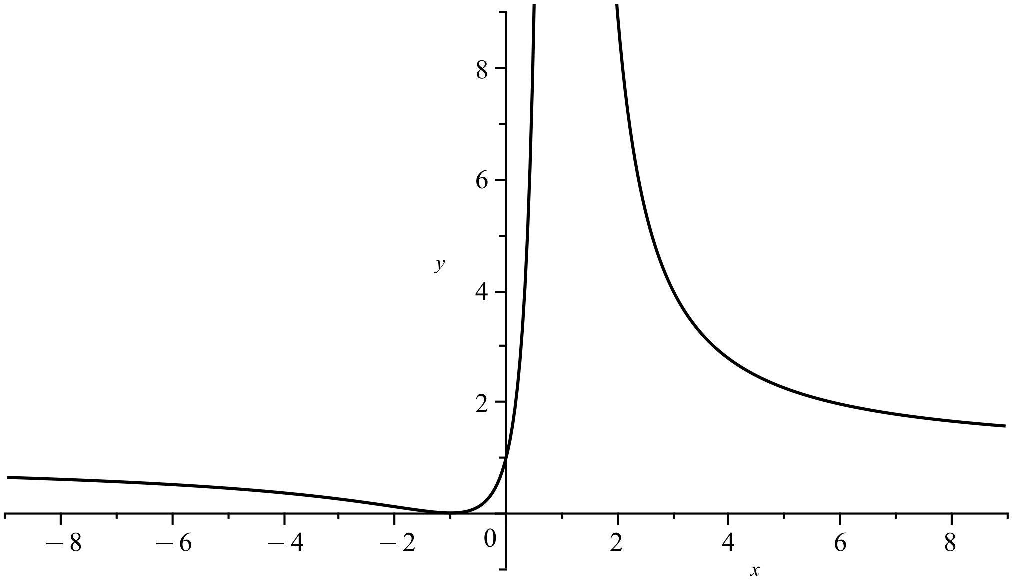
Essa si annulla solo per $x = -2$. *Inoltre*

$$f''(x) > 0 \iff x \in (-2, 1) \cup (1, +\infty),$$

$$f''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -2)\,.$$

$f(x)$ *è concava in* $(-\infty, -2)$, *convessa in* $(-2, 1)$ *e in* $(1, +\infty)$. *Essa ha un flesso ascendente in* $x = -2$.
Il grafico di $f(x)$ *è in figura 1.*

Figure 1: Il grafico di $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$



Esercizio 2

Studiare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x^2-x^3)-1}{x\,\mathrm{senh}\,(x-x^3)}$$

Soluzione:

Applicando le formule di Taylor di $\cosh x$ *e* $\mathrm{senh}\, x$ *con punto base 0 otteniamo:*

$$\cosh(x^2-x^3)-1 = 1+\frac{(x^2-x^3)^2}{2}+o(x^2-x^3)-1=$$

$$=\frac{(x^2-x^3)^2}{2}+o\Big((x^2-x^3)^2\Big)=\frac{x^4}{2}+o(x^4),$$

$$x\sinh(x-x^3)=x\left(x-x^3+o(x-x^3)\right)=x^2-x^4+o(x^2-x^4)=x^2+o(x^2).$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x^2-x^3)-1}{x\,\mathrm{senh}\,(x-x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^2+o(x^2)}=0.$$

Esercizio 3

Calcolare il seguente integrale:

$$\int x\left(e^{2x}+e^{-x}\right)\,dx.$$

Soluzione:

Calcoliamo separatamente i due integrali

$$\int xe^{2x}\,dx, \qquad\qquad \int xe^{-x}\,dx.$$

Cerchiamo A*,* B *tali che*

$$\int xe^{2x}\,dx=(Ax+B)e^{2x}+C, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

Abbiamo

$$\left[(Ax+B)e^{2x}\right]'=(2Ax+A+2B)e^{2x},$$

quindi A *e* B *sono soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} 2A=1 \\ A+2B=0. \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo $A=\dfrac{1}{2}, B=-\dfrac{1}{4}$*, da cui*

$$\int xe^{2x}\,dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{2x}+C, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

Procediamo analogamente per il secondo integrale.

$$\int xe^{-x}\,dx=(Rx+S)e^{-x}+K, \qquad K\in\mathbb{R},$$

$$\left[(Rx+S)e^{-x}\right]'=(-Rx+R-S)e^{-x},$$

$$\begin{cases} -R=1 \\ R-S=0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono $R=S=-1$*. Di conseguenza*

$$\int xe^{-x}\,dx=(-x-1)e^{-x}+K, \qquad K\in\mathbb{R}.$$

Concludendo,

$$\int x\left(e^{2x}+e^{-x}\right)\,dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{2x}-(x+1)e^{-x}+H, \qquad H\in\mathbb{R}.$$