

Esercizio 1

Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} + x.$$

Soluzione:

La radice è definita per $x \geq 0$, quindi il dominio di $f(x)$ è $E = [0, +\infty)$. Osserviamo che la funzione è un quadrato:

$$f(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} + x = (x - \sqrt{x})^2 \geq 0.$$

Essa si annulla se e solo se $x - \sqrt{x} = 0$. Questo accade se e solo se $x = 0$ o $x = 1$. Di conseguenza questi due punti sono punti di minimo assoluto (globale) di $f(x)$.

Studiamo i limiti ai bordi del dominio.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

perché $f(x)$ è continua a destra in 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x\sqrt{x} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) = +\infty,$$

perché x^2 tende a $+\infty$ e la parentesi tende ad 1. Non esistono asintoti orizzontali. Per quanto riguarda gli asintoti obliqui studiamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x\sqrt{x} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\sqrt{x} + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Il limite non è finito, quindi non esistono asintoti obliqui.

Per $x > 0$ la derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = 2x - 3\sqrt{x} + 1.$$

Per studiare zeri e segno di $f'(x)$ poniamo $t = \sqrt{x}$. Abbiamo

$$f'(x) = 2x - 3\sqrt{x} + 1 = 2t^2 - 3t + 1 = (2t - 1)(t - 1) = (2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 1).$$

Per cui $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ e $x = \frac{1}{4}$. Inoltre

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty),$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in \left(\frac{1}{4}, 1\right).$$

La funzione ha un massimo per $x = \frac{1}{4}$ e un minimo per $x = 1$ (cosa già nota). Abbiamo

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}.$$

Per disegnare il grafico in prossimità dell'origine studiamo il limite di $f'(x)$ per $x \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - 3\sqrt{x} + 1) = 1.$$

Il grafico di $f(x)$ nell'origine è tangente alla bisettrice del primo quadrante.

La derivata seconda è

$$f''(x) = 2 - \frac{3}{2\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x}}.$$

Per $x > 0$ abbiamo

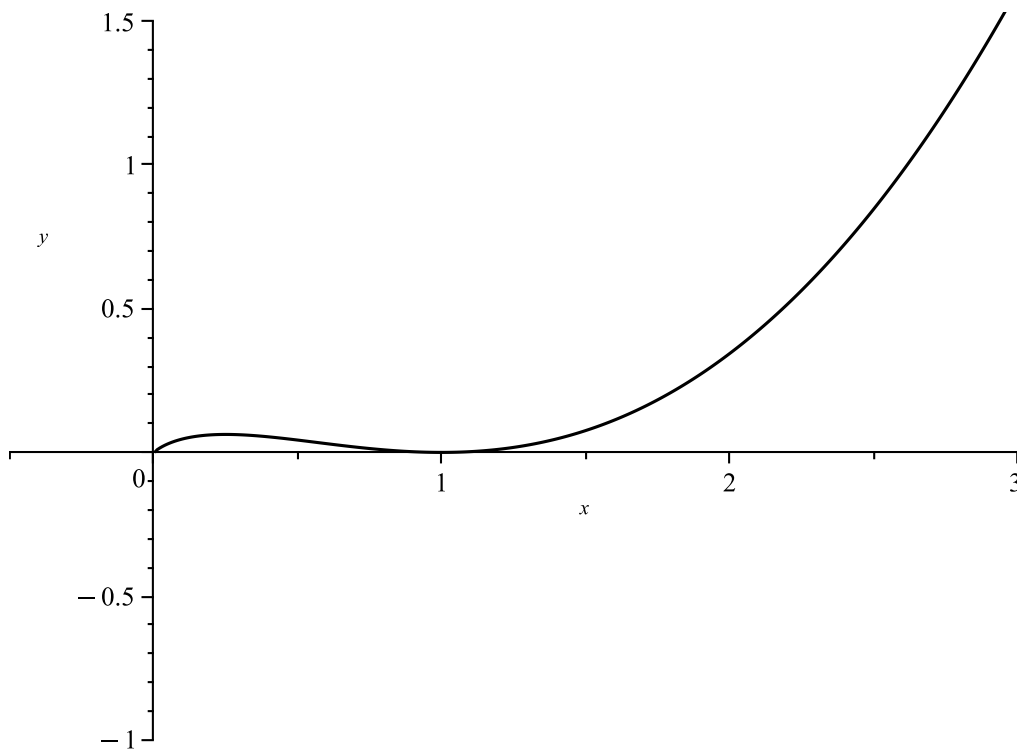
$$f''(x) = 0 \iff x = \frac{9}{16},$$

$$f''(x) > 0 \iff x > \frac{9}{16}, \quad f''(x) < 0 \iff 0 < x < \frac{9}{16}$$

La funzione è concava per $0 < x < \frac{9}{16}$ e convessa per $x > \frac{9}{16}$. Essa ha un punto di flesso ascendente in $\frac{9}{16}$.

Il grafico di $f(x)$ è in figura 1.

Figure 1: Il grafico di $x^2 - 2x\sqrt{x} + x$



Esercizio 2

Studiare il limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n^4 - n^2 \sin n + e^{-n}}{7n^3 + n \cos(n) + 1}$$

Soluzione:

Dividiamo numeratore e denominatore per n^3 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n^4 - n^2 \operatorname{sen} n + e^{-n}}{7n^3 + n \cos(n) + 1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n - \frac{\operatorname{sen} n}{n} + \frac{e^{-n}}{n^3}}{7 + \frac{\cos(n)}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{-3 - \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} + \frac{e^{-n}}{n^4}}{7 + \frac{\cos(n)}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \right) = -\infty, \end{aligned}$$

perché n tende a $+\infty$ e la parentesi tende a $-\frac{3}{7}$.

Esercizio 3

Calcolare:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 4 \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x \, dx.$$

Soluzione:

Abbiamo

$$\begin{aligned} \int 4 \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x \, dx &= \int 4 \operatorname{sen} x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx = \\ &= \int 2 \operatorname{sen} x (e^x - e^{-x}) \, dx = \int 2 (\operatorname{sen} x) e^x \, dx - \int 2 (\operatorname{sen} x) e^{-x} \, dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo il primo integrale. Conosciamo la forma della primitiva:

$$\int (\operatorname{sen} x) e^x \, dx = (A \operatorname{sen} x + B \cos x) e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Derivando otteniamo

$$(\operatorname{sen} x) e^x = ((A - B) \operatorname{sen} x + (A + B) \cos x) e^x.$$

I valori di A e B si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} A - B = 1 \\ A + B = 0. \end{cases}$$

Da qui abbiamo $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, quindi

$$\int 2 (\operatorname{sen} x) e^x \, dx = 2 \left(\frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{\cos x}{2} \right) e^x + C = (\operatorname{sen} x - \cos x) e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Per il secondo integrale si può procedere in modo analogo o effettuare una sostituzione, ponendo $t = -x$ e sfruttando l'integrale precedente:

$$\begin{aligned} \int 2 (\operatorname{sen} x) e^{-x} \, dx &= \int 2 (\operatorname{sen}(-t)) e^t (-dt) = \int 2 (\operatorname{sen} t) e^t \, dt = (\operatorname{sen} t - \cos t) e^t + K = \\ &= (\operatorname{sen}(-x) - \cos(-x)) e^{-x} + K = (-\operatorname{sen} x - \cos x) e^{-x} + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Concludendo:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x \, dx &= \int 2 (\operatorname{sen} x) e^x \, dx - \int 2 (\operatorname{sen} x) e^{-x} \, dx = \\ &= \left[(\operatorname{sen} x - \cos x) e^x - (-\operatorname{sen} x - \cos x) e^{-x} \right]_{-\pi}^{\pi} = \left[(\operatorname{sen} x - \cos x) e^x + (\operatorname{sen} x + \cos x) e^{-x} \right]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= -\cos \pi e^{\pi} + \cos \pi e^{-\pi} + \cos(-\pi) e^{-\pi} - \cos(-\pi) e^{\pi} = e^{\pi} - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^{\pi} = 2(e^{\pi} - e^{-\pi}). \end{aligned}$$