

1 Intervalli

Definiamo *intervalli* alcuni sottoinsiemi della retta reale $\mathbb{R}$ definiti come segue.

Intervallo **chiuso** di estremi a e b :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Intervallo **aperto** di estremi a e b :

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Intervallo **chiuso-aperto** di estremi a e b :

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

Intervallo **aperto-chiuso** di estremi a e b :

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

La parentesi quadra $[$ o $]$ indica l'appartenenza dell'estremo all'intervallo, La parentesi tonda $($ o $)$ indica la non appartenenza dell'estremo all'intervallo.

Per estensione e per comodità di notazione tale simbologia viene adottata anche per indicare semirette o tutta la retta reale. I simboli $-\infty$ e $+\infty$ vengono usati per indicare l'assenza di un estremo. Le parole chiusa e aperta si riferiscono solo all'unico estremo.

Semiretta **aperta** di estremo sinistro a :

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Semiretta **chiusa** di estremo sinistro a :

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

Semiretta **aperta** di estremo destro b :

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Semiretta **chiusa** di estremo destro b :

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

A volte l'insieme dei reali $\mathbb{R}$ si indica come un "intervallo" di estremi $-\infty$ e $+\infty$:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty).$$

Gli intervalli di cui sopra, con estremi reali o infiniti, vengono indicati come **intervalli in senso esteso**.

2 Morfismi

Siano X e Y insiemi dotati di relazioni binarie ρ_X e ρ_Y . Un'applicazione

$$f : X \rightarrow Y$$

si dice **morfismo** di (X, ρ_X) in (Y, ρ_Y) se

$$\forall x_1, x_2 \in X : (x_1 \rho_X x_2) \implies (f(x_1) \rho_Y f(x_2)).$$

Le funzioni crescenti sono morfismi di ordinamenti. Dati due insiemi ordinati $(X, \leq_X)$ in $(Y, \leq_Y)$, la relazione che definisce un morfismo di $(X, \leq_X)$ in $(Y, \leq_Y)$ è la stessa che definisce le funzioni crescenti:

$$\forall x_1, x_2 \in X : (x_1 \leq_X x_2) \implies (f(x_1) \leq_Y f(x_2)).$$

In particolare, se $X = Y = \mathbb{R}$, abbiamo la familiare nozione di crescenza per funzioni reali di variabile reale:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : (x_1 \leq x_2) \implies (f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Osserviamo che anche le funzioni decrescenti sono morfismi di insiemi ordinati, quando si definisca un nuovo ordinamento $\leq_Y^*$ in Y rovesciando quello esistente:

$$\forall y_1, y_2 \in Y : y_1 \leq_Y^* y_2 \iff y_1 \geq_Y y_2.$$